



Tema 2. Razonamiento Aproximado

Lección 2.2. Razonamiento con imprecisión

Referencias Bibliográficas (diapositivas):

- José Cuenca. Sistemas Inteligentes. Conceptos, técnicas y métodos de construcción. Facultad de Informática – Servicio de Publicaciones. Fundación General de la UPM. Madrid, 1997.
- G. J. Klir, B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Prentice Hall PTR. New Jersey, 1995.

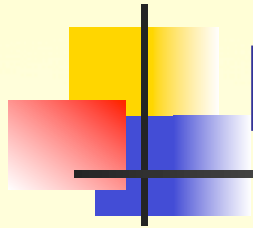


Índice


Razonamiento con imprecisión

- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos

Índice



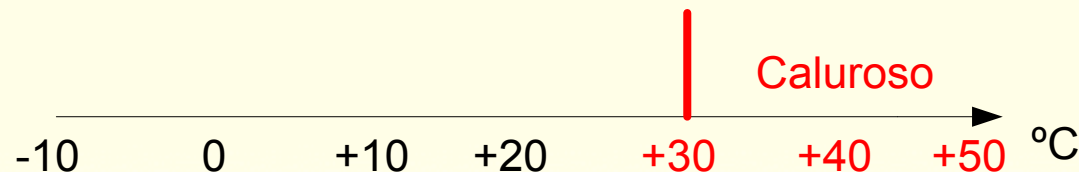
Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión. 
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

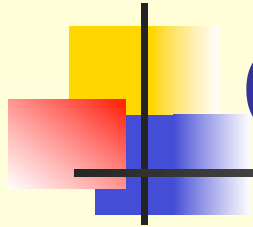


Conceptos (I)


- La lógica borrosa permite representar conjuntos con **fronteras no precisas**.
- La afirmación "x pertenece a A" no es cierta o falsa, sino que medible mediante una **posibilidad** en $[0,1]$.
- Permite manejar la vaguedad o imprecisión.
 - "Día caluroso": la frontera entre caluroso y templado no es exacta



- ¿Se puede suponer que si hay 30°C el día es caluroso, pero **si hay 29°C entonces ya no lo es?**



Conceptos (II)

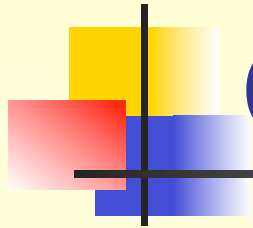
- **Imprecisión**: vaguedad, fronteras mal definidas.
- **Incertidumbre**: si lanzamos un dado hay seis posibilidades (precisas), pero no se desconoce qué saldrá. 
- Aplicaciones de la lógica borrosa:
 - Sistemas basados en el conocimiento.
 - Control difuso.
 - Reconocimiento de patrones.
 - Proceso de encaje en marcos.



Índice

Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. **Conjuntos borrosos.**
3. Operaciones con conjuntos borrosos.



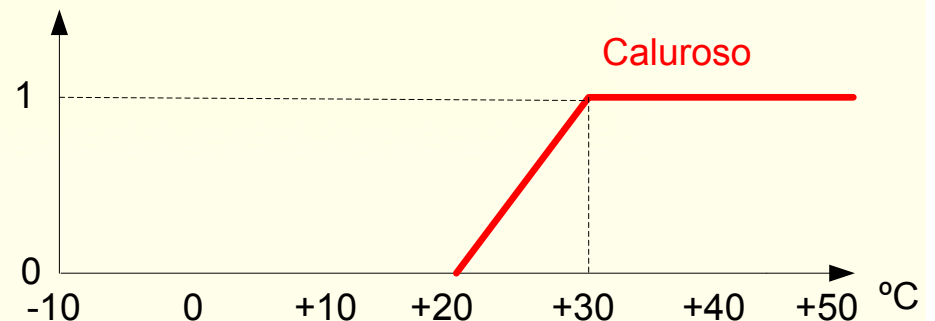
Conjuntos borrosos

- Conjunto borroso: aquél en donde la pertenencia de los elementos se define mediante una **función de pertenencia** o **función de distribución de posibilidad**.

- $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$.

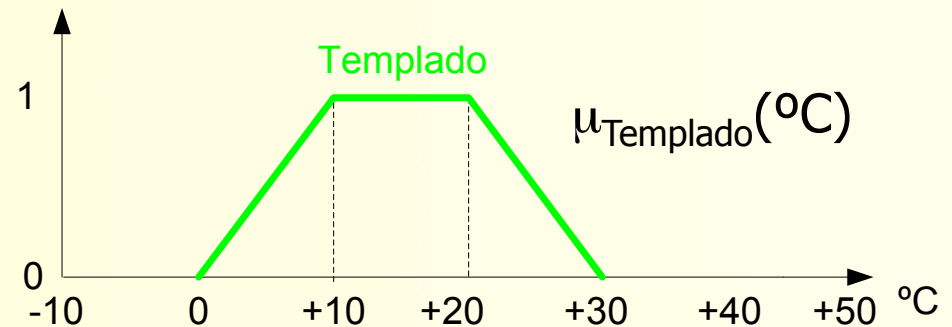
- El conjunto borroso A tiene una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigna a cada valor $x \in X$ un número entre 0 (no pertenece) y 1 (sí pertenece).
- Los valores intermedios representan pertenencia parcial.

- Ejemplo: $\mu_{\text{caluroso}}: T^a \rightarrow [0,1]$:

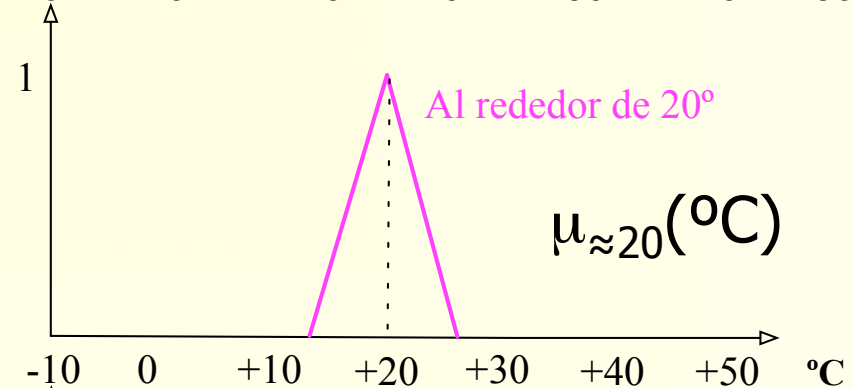


Distribuciones típicas

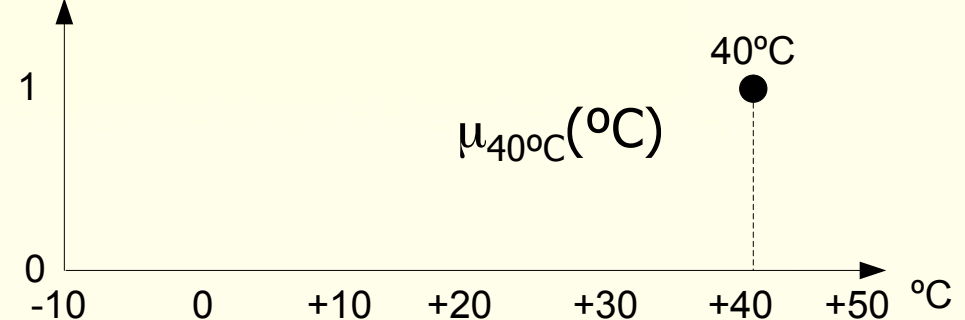
■ Trapezoidales:

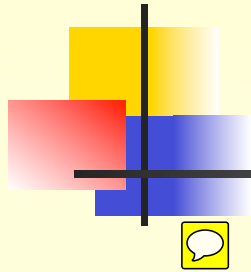


■ Triangulares:

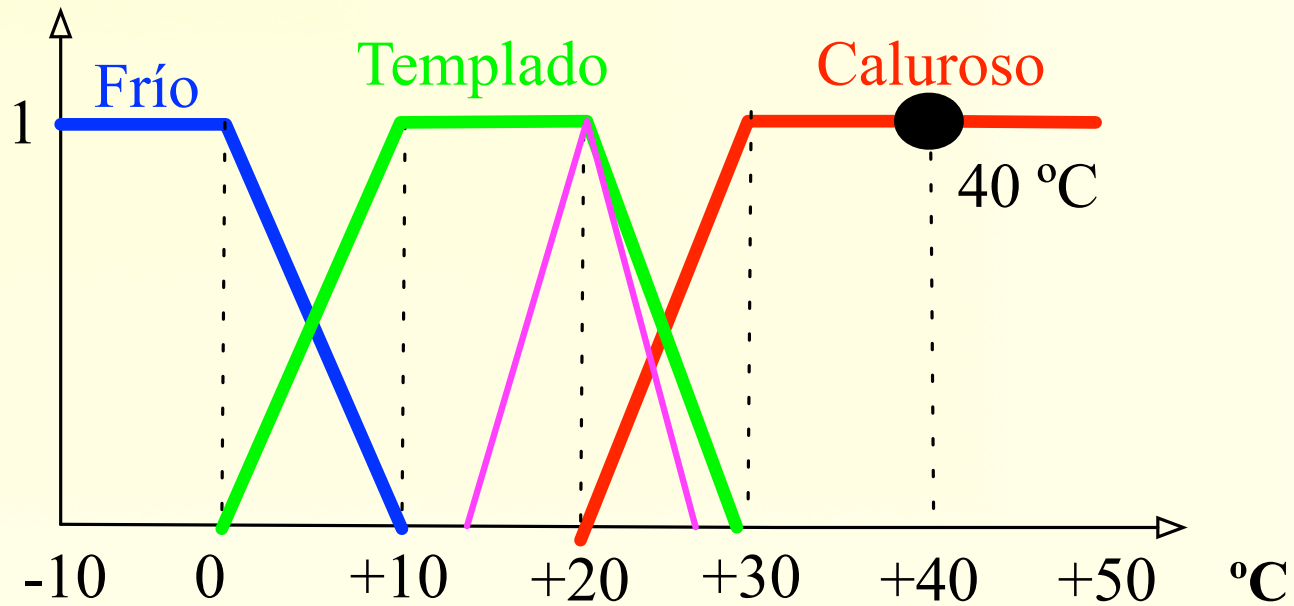


■ Nítidas:





Ejemplo

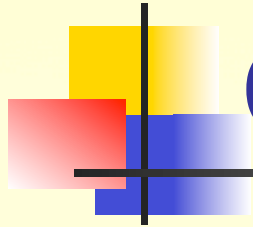


$\mu_{\text{Frío}}(^{\circ}\text{C})$ $\mu_{\text{Templado}}(^{\circ}\text{C})$ $\mu_{\approx 20}(^{\circ}\text{C})$ $\mu_{\text{Caluroso}}(^{\circ}\text{C})$ $\mu_{40^{\circ}\text{C}}(^{\circ}\text{C})$






Índice

Fundamentos de lógica borrosa

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.



Composición de fórmulas

- A partir de la cuantificación de la posibilidad  de que sea cierta "x es p" expresado como $\mu_p(x)$:
 - x es p y q: $\mu_{p \wedge q}(x)$. 
 - x es p ó q: $\mu_{p \vee q}(x)$ 
 - x no es p: $\mu_{\sim p}(x)$ 
 - Si x es p, entonces x es q: $\mu_{p \rightarrow q}(x)$ 
- Generalización a n dimensiones:
 - $\mu_{p \wedge q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mu_{p \vee q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, etc.



Extensión cilíndrica

- Para componer dos funciones, deben estar **referidas a las mismas variables**:


- No es posible componer x es p e y es q :

$$\mu_p(x) \wedge \mu_q(y)$$

- Para ello se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y , y la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x para obtener $\mu_p(x,y)$ y $\mu_q(x,y)$.

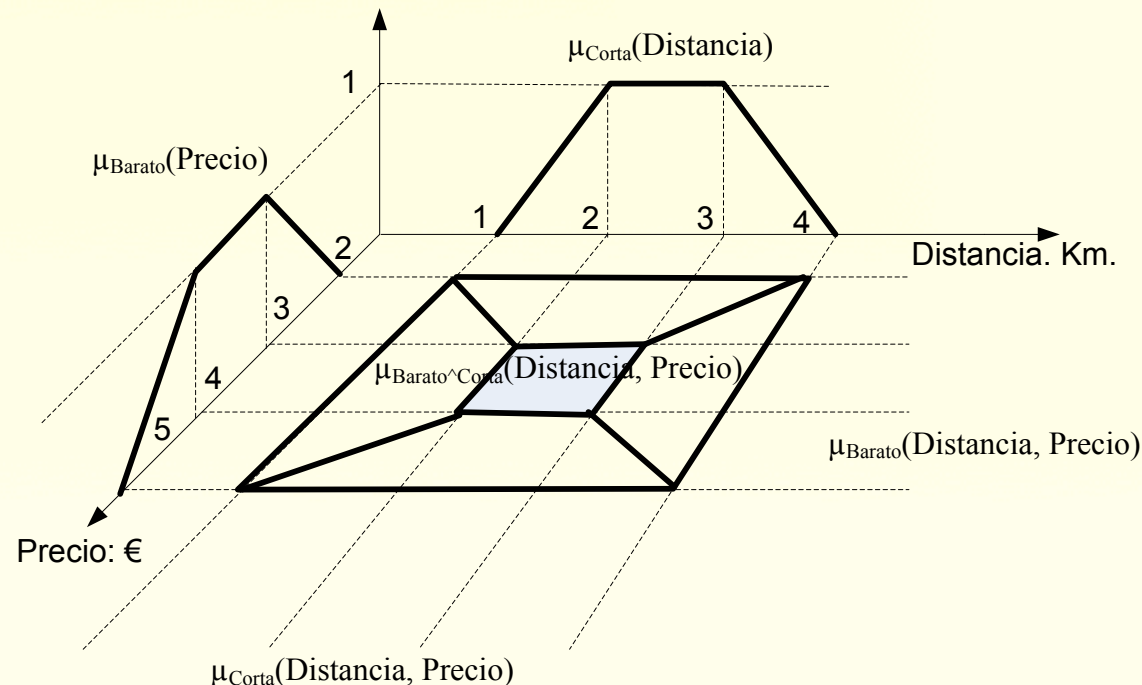
- Entonces es posible: $\mu_{p \wedge q}(x,y)$

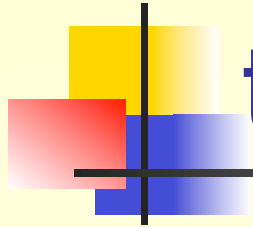
- La extensión cilíndrica de $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n)$ con y es $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ tal que cumple:

$$\forall y \mu(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) $$


Extensión cilíndrica. Ejemplo

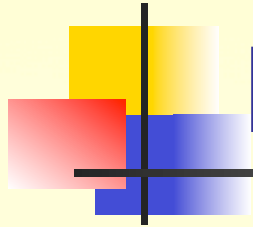
- Se desea representar que la tarifa de un taxi es barata cuando la carrera es corta.
 - Se tiene $\mu_{\text{corta}}(\text{distancia})$ y $\mu_{\text{barato}}(\text{precio})$.
 - Se desea calcular $\mu_{\text{corta} \wedge \text{barato}}(\text{distancia}, \text{precio})$






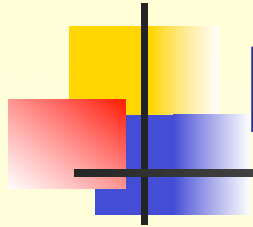
t-Norma, t-Conorma, negación

- Se manejan las siguientes funciones:
 - t-norma: 
 - Conjunción (lógica), intersección (conjuntos)
 - $T(x, y) \cdot \mu_{p \wedge q}(x) = T(\mu_p(x), \mu_q(x))$
 - t-conorma:
 - Disyunción (lógica), unión (conjuntos)
 - $S(x, y) \cdot \mu_{p \vee q}(x) = S(\mu_p(x), \mu_q(x))$
 - Negación:
 - $N(x) \cdot \mu_{\sim p}(x) = N(\mu_p(x))$.



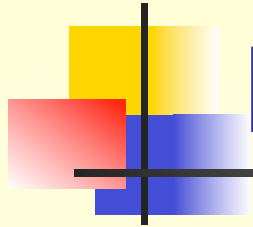
Funciones T: t-normas

- Es una función que devuelve un valor $[0,1]$.
- Representa la **conjunción** o **intersección**.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
 1. $T(x,1) = x$ (elemento neutro)
 2. $x \leq y \rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$ (monotonía)
 3. $T(x,y) = T(y,x)$ (conmutativa)
 4. $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (asociativa)
- **Ejemplos:**
 -  $T(x,y) = \min(x,y)$ (mínimo)
 - $T(x,y) = P(x,y) = x \cdot y$ (producto)
 - $T(x,y) = W(x,y) = \max(0, x+y-1)$ (Lukasiewicz)
 - $T(x,y) = Z(x,y) = x$ si $y=1$; y si $x=1$; 0 resto (drástica)



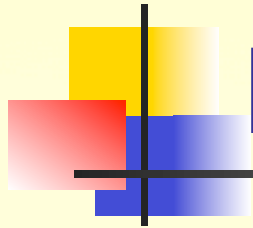
Funciones S: t-conormas

- Es una función binaria que devuelve un valor $[0,1]$.
- Representa la disyunción.
- $\forall x, y, z \in [0,1]$ Propiedades:
 1. $S(x,0) = x$ (elemento neutro)
 2. $x \leq y \rightarrow S(x,z) \leq S(y,z)$ (monotonía)
 3. $S(x,y) = S(y,x)$ (conmutativa)
 4. $S(x,T(y,z)) = S(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
 - $S(x,y) = \max(x,y)$ (máximo)
 - $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x \cdot y$ (suma-producto)
 - $S(x,y) = W'(x,y) = \min(1, x+y)$ (Lukasiewicz)
 - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto (drástica)



Funciones de negación

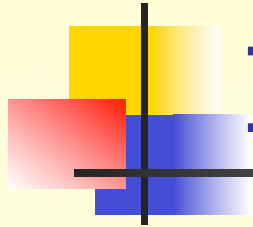
- Es una función unaria que devuelve un valor $[0,1]$.
- Para que sea intuitiva debe cumplir $\forall x \in [0,1]$:
 1. $N(0) = 1; N(1) = 0$ (condiciones frontera)
 2. $x \leq y \rightarrow N(x) \geq N(y)$ (inversión de monotonía)
- Ejemplos:
 - $N(x) = (1-x)$
 - $N(x) = (1-x^2)^{1/2}$



Dualidad

- Se dice que una t-norma y una t-conorma son duales con respecto a una negación sii:
 - $N(T(x,y)) = S(N(x), N(y))$
 - $N(S(x,y)) = T(N(x), N(y))$
- Son duales con respecto a $N(x) = 1-x$:
 - $\langle \min(x,y), \max(x,y) \rangle$
 - $\langle P(x,y), P'(x,y) \rangle$
 - $\langle W(x,y), W'(x,y) \rangle$
 - $\langle Z(x,y), Z'(x,y) \rangle$

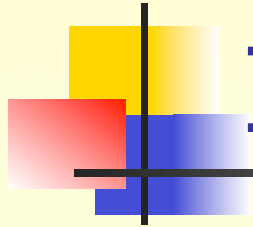




Implicación difusa (I)

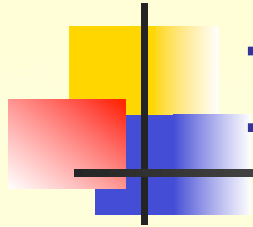
- Se han visto las operaciones:
 - $T(x,y)$, $S(x,y)$ y $N(x)$
 - **Conjuntos:**
 - Intersección, unión y complementario
 - **Lógica:**
 - Conjunción, disyunción y negación
- En lógica borrosa se define la implicación a través de la función binaria $J(x,y)$ que devuelve un valor $[0,1]$.

$$\mu_{p \rightarrow q}(x) = J(\mu_p(x), \mu_q(x))$$



Implicación difusa (II)

- De la lógica clásica, se tiene que:
 - $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
 - $J(x,y) = S(N(x),y)$.
- Tomando $N(x) = 1-x$, se tiene:
 - Con $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ $J(x,y) = \text{máx}(1-x,y)$
 - Con $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x \cdot y$ $J(x,y) = 1-x+x \cdot y$
 - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ $J(x,y) = \text{mín}(1,1-x+y)$
 - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto
 $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $y=0$; 1 resto



Implicación difusa (III)

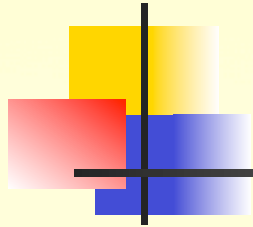
- En la lógica clásica se cumple:
 - $A \vee B = A \vee (\neg A \wedge B)$
 - Puesto que $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
 - Se tiene: $A \rightarrow B = \neg A \vee (A \wedge B)$
 - $J(x,y) = S(N(x), T(x,y))$
- Utilizando la negación $N(x) = 1-x$:
 - Con $\langle \min, \max \rangle$ $J(x,y) = \max(1-x, \min(x,y))$
 - Con $\langle P, P' \rangle$ $J(x,y) = 1-x + x^2y$
 - Con $\langle W, W' \rangle$ $J(x,y) = \max(1-x, y)$
 - Con $\langle Z, Z' \rangle$
 $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $x \neq 1$ y $y \neq 1$; 1 si $x \neq 1$ y $y=1$
 - $J(x,y) = \min(x,y)$. Implicación de Mamdani



Índice

Razonamiento con imprecisión

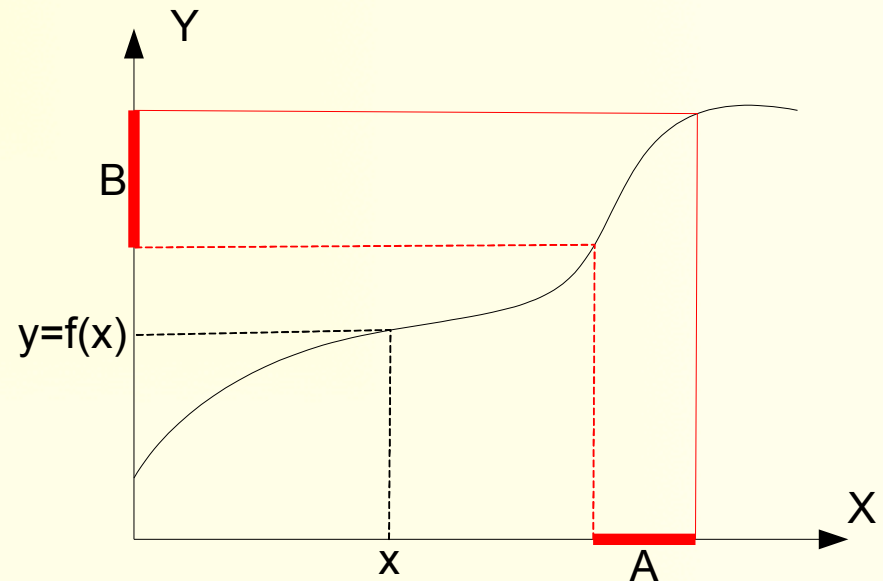
- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos

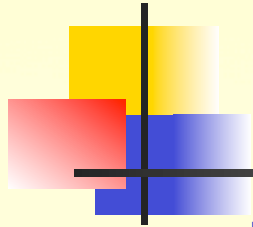


Inferencia en conjuntos (I)

La inferencia en conjuntos clásicos se puede ver de la siguiente forma:

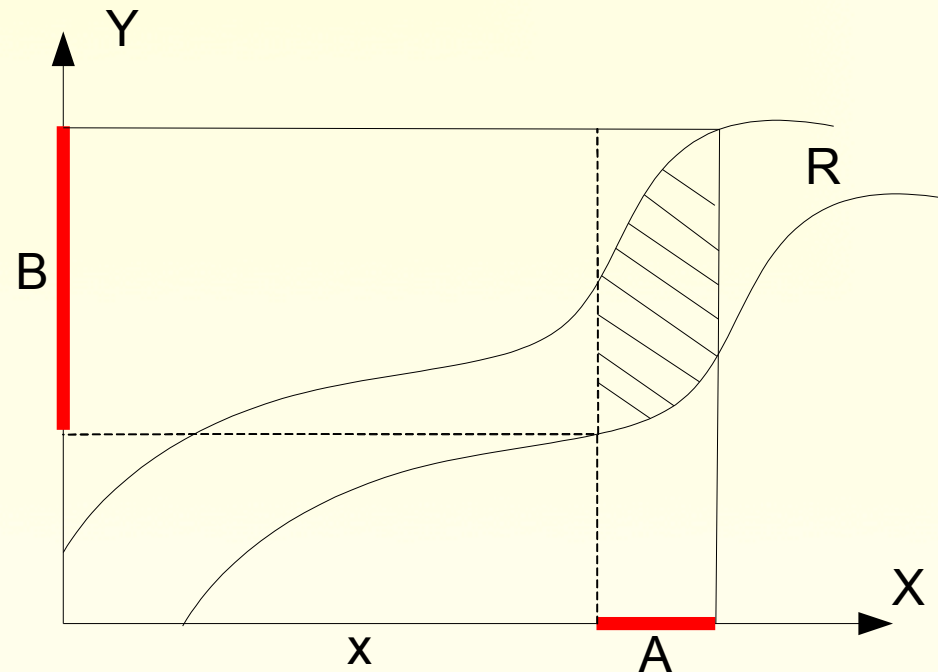
- Dados X e Y dos conjuntos.
- La relación entre ambos viene dada por la función $f(X)$.
- Dado un valor $X=x$, se puede inferir $y=f(x)$.
- Dado un subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$: $B = \{y \in Y \mid y = f(x), x \in A\}$





Inferencia en conjuntos (II)

- Dada una relación R cualquiera entre los conjuntos X e Y :
 - Dado el subconjunto $A \subset X$, se puede inferir el subconjunto $B \subset Y$, $B = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in R, x \in A\}$



Función característica

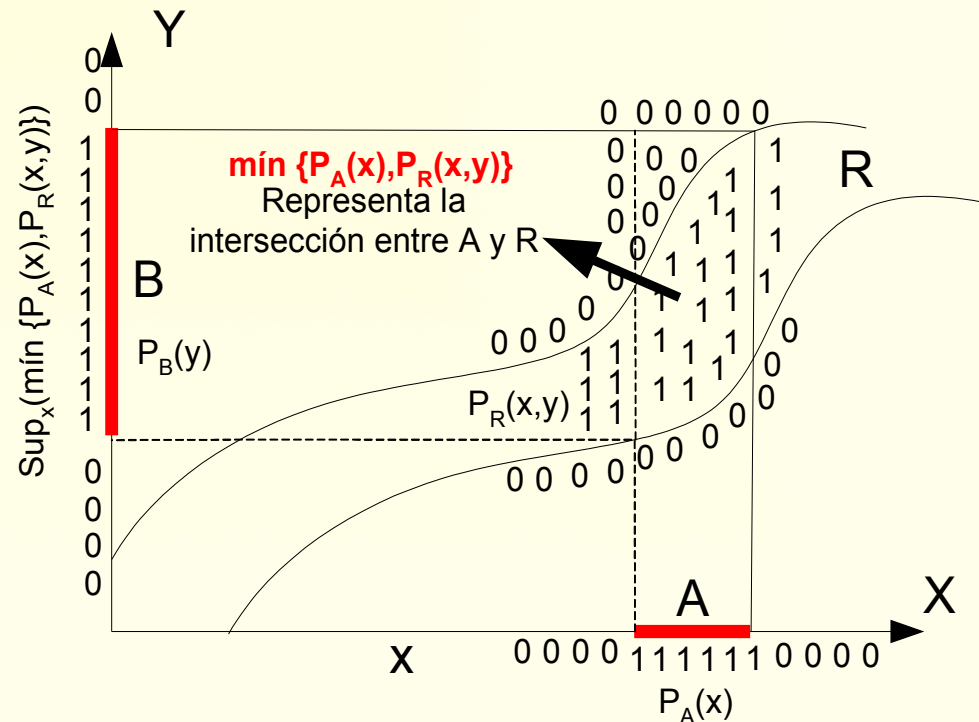
- Se define la **función característica** de un conjunto A, $P_A(x)$, a una función de pertenencia definida:
 - $P_A(x)=1$, si $x \in A$
 - $P_A(x)=0$ en otro caso.

Para todos los valores de x (por cada fila) se obtiene el supremo

$$\text{Sup}_x(\text{mín } P_A(x), P_R(x, y))$$

Se obtiene la fórmula:

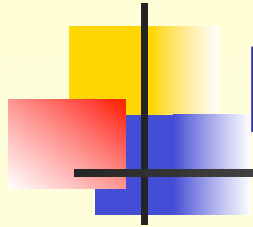
$$P_B(y) = \text{Sup}_{x \in X} \{ \text{mín } \{ P_A(x), P_R(x, y) \} \}$$





Regla composicional de inferencia

- Partiendo de la expresión anterior:
 - $P_B(y) = \sup_{x \in X} \{ \min \{ P_A(x), P_R(x, y) \} \}$
- Generalizando para conjuntos difusos:
 - $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{ \min \{ \mu_A(x), \mu_R(x, y) \} \}$
- La intersección puede emplear una T-norma cualquiera:
 - $\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \{ T(\mu_A(x), \mu_R(x, y)) \}$
- Si R puede ser una relación de implicación:
 - **Regla Composicional de Inferencia (RCI)**
 $\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{ T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)) \}$



Modus ponens generalizado

- Con la RCI, se puede hacer inferencia con modus ponens:
 - Regla: Si X es A, entonces Y es B
 - Hecho: X es A.

 - Conclusión: Y es B
-
- En lógica borrosa se puede generalizar al no requerir X es A, sino X es A':
 - **Modus ponens generalizado:**
 - Regla: Si X es A, entonces Y es B
 - Hecho: X es A'

 - Conclusión: Y es B'
- La función de posibilidad de $\mu_{B'}$ se calcula con RCI.



Inferencia borrosa con RCI

- Datos: X es A: $\mu_A(x)$, Y es B: $\mu_B(y)$, X es A': $\mu_{A'}(x)$
- Objetivo: cálculo $\mu_{B'}(y)$
- 1. Calcular $\mu_{A \rightarrow B}(x, y)$ a partir de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$
 - Es necesario realizar las **extensiones cilíndricas**: $\mu_A(x)$ con y , $\mu_B(y)$ con x
 - Se emplea para la implicación cualquier función $J(x, y)$.
Zadeh: $J(x, y) = \max \{1 - x, \min(x, y)\}$.
- 2. Calcular $T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))$.
 - Se realiza la **extensión cilíndrica** de $\mu_{A'}(x)$ con y .
 - Se emplea una T-norma. $T(x, y) = \min(x, y)$.
- 3. **Calcular el supremo** en x de $T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))$, que está en función de x e y .
 - Se obtiene la distribución de posibilidad sobre la dimensión y : $\mu_{B'}(y)$, es decir, las posibilidades de y es B' .





Motor de inferencia borroso

- Base de conocimiento:
 - R1: Si X es A_1 , entonces Y es B_1 .
 - R2: Si X es A_2 , entonces Y es B_2 .
 -
 - Rn: Si X es A_n , entonces Y es B_n .
 - Hecho: X es A'
- Se aplica la RCI a cada regla, obteniendo:
 - $\mu_{B_1'}(y), \mu_{B_2'}(y), \dots, \mu_{B_n'}(y)$.
- A partir de las distribuciones anteriores, se calcula la distribución final y es B' mediante la t-conorma S.
 - $\mu_{B'}(y) = S(\mu_{B_1'}(y), \mu_{B_2'}(y), \dots, \mu_{B_n'}(y))$.

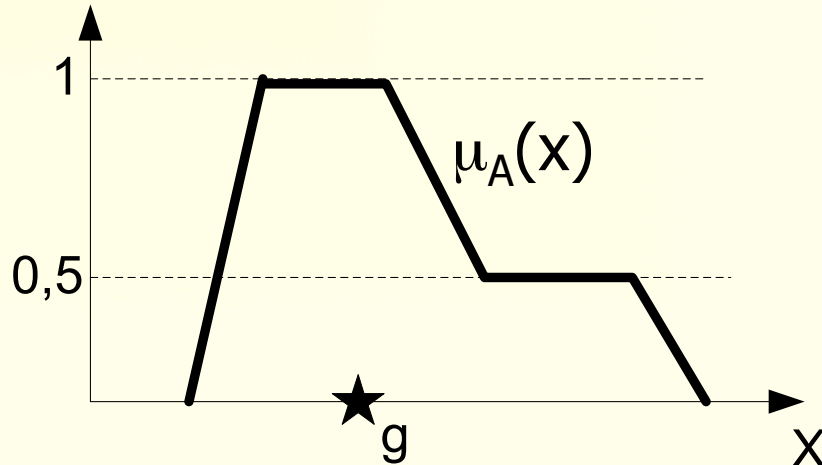


Desborrocificación

Método del centro de gravedad

- Cálculo de la proyección en el eje x del centro de gravedad de la distribución.
- Se debe muestrear **suficientemente fino** para cubrir adecuadamente la función.
- Un muestreo excesivo exige gran carga computacional.
- Para generalizar $\mu_A(x) = \mu_{B'}(y)$

$$g = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)}$$



Desborrocificación

Método Σ_{cuenta}

■ Objetivo:

- Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad $\mu_{B1}(x), \mu_{B2}(x), \dots, \mu_{Bn}(x)$
- Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ **se parece más** a una dada $\mu_A(x)$.

■ La Σ_{cuenta} es una medida proporcional al área de la distribución.

- Se basa en la discretización de la función de distribución.

- $$\Sigma_{\text{cuenta}}(A) = \sum_{i=1}^N \mu_A(x_i)$$

■ El método elige como **más parecido** a $\mu_A(x)$ aquella $\mu_{Bi}(x)$ que **máximiza**:

$$\Sigma_{\text{cuenta}}(B_i/A) = \frac{\Sigma_{\text{cuenta}}(A \wedge B_i)}{\Sigma_{\text{cuenta}}(B_i)}$$



Desborrocificación

Método de la distancia

- Objetivo:

- Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad:
 $\mu_{B1}(x), \mu_{B2}(x), \dots, \mu_{Bn}(x)$
- Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ **se parece más** a una dada $\mu_A(x)$.

- Se emplea una función distancia definida como:

$$d_i = \sqrt{\alpha \cdot (B_i - A)^2 + \beta \cdot (g_i - g)^2}$$

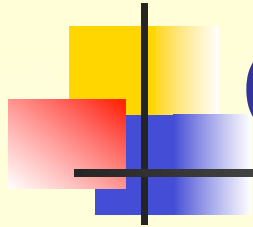
- B_i y A son, respectivamente, las áreas de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
- g_i y g son, respectivamente, los centros de gravedad de $\mu_{Bi}(x)$ y $\mu_A(x)$.
- α y β son dos constantes: $\alpha + \beta = 1$.
- El método elige como **más parecido** a $\mu_A(x)$ aquella $\mu_{Bi}(x)$ que **minimiza** d_i .




Índice

Razonamiento con imprecisión

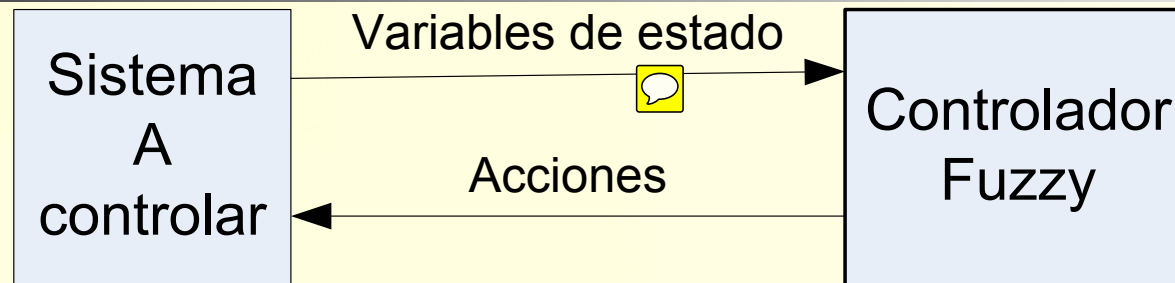
- Fundamentos de lógica borrosa
- Razonamiento en lógica borrosa
- Controladores difusos



Controladores difusos

- Se emplean para controlar sistemas **inestables**. 
- El control tiene por objeto garantizar una salida en el sistema a pesar de las **perturbaciones** que le afectan.
- Ejemplos:
 - Sistemas de **navegación**.
 - Sistemas de **climatización**.
 - Sistemas de **ventilación** (túneles, garajes).

Esquema control difuso



■ Variables de estado:

- s_1, s_2, \dots, s_n : estado del sistema. **Temperatura.**
- e_1, e_2, \dots, e_n : desvíos (error) con respecto al valor de referencia. Temperatura con respecto a 20 °C.
- $\Delta e_1, \Delta e_2, \dots, \Delta e_n$: tendencia del error.
- u_1, u_2, \dots, u_m : estado del elemento a controlar (actuador). Apertura de válvula, caudal de gas.

■ Acciones:

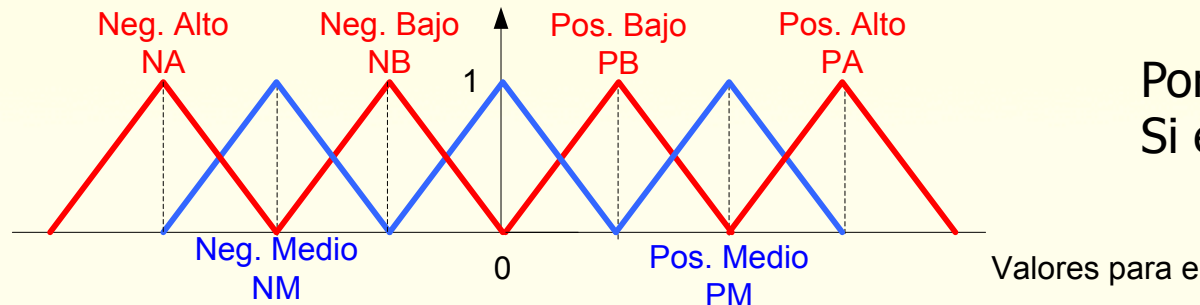
- v_1, v_2, \dots, v_m : cambios e realizar en los actuadores. Abrir o cerrar en un cierto grado válvula o caudal de gas.

Modelo de control difuso

- Los valores de las variables de estado y acciones pueden ser etiquetas lingüísticas (valores cualitativos) que son representados por funciones de posibilidad:

Si $s_1=A_1, \dots, e_1=B_1, \dots, \Delta e_1=C_1, \dots, u_1=D_1, \dots$, entonces $v_1=E_1, \dots$

- En lo que sigue, se utilizarán reglas del tipo:
 - Si $e=A$ y $\Delta e=B$, entonces $v = C$
 - Cada valor de e , Δe y v serán etiquetas lingüísticas con su correspondiente función de posibilidad. Por ejemplo, para e :



Por ejemplo:
Si $e = NB$



Notación

- Dada la regla: Si $e=A$ y $\Delta e=B$, entonces $v = C$
 - A, B y C son funciones de posibilidad:
 - $\mu_A(e)$, $\mu_B(\Delta e)$, $\mu_C(v)$
 - La notación será la siguiente:
 - Si $e = A(e)$ y $\Delta e=B(\Delta e)$, entonces $v = C(v)$
 - Un controlador difuso posee una **base de conocimiento** de reglas del tipo:
 - R1: Si $e = A_1(e)$ y $\Delta e=B_1(\Delta e)$, entonces $v = C_1(v)$
 - R2: Si $e = A_2(e)$ y $\Delta e=B_2(\Delta e)$, entonces $v = C_2(v)$
 - ...
 - Rn: Si $e = A_n(e)$ y $\Delta e=B_n(\Delta e)$, entonces $v = C_n(v)$
-
- En un momento el estado del sistema es:
 - $e = A(e)$ y $\Delta e=B(\Delta e)$.
 - Tras un proceso de inferencia, el controlador responde para mantener el equilibrio: $v = C(v)$



Regla composicional de inferencia

- El proceso de inferencia emplea la regla composicional de inferencia:

$$\mu_{B'}(y) = \sup_{x \in X} \{T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y))\}$$

- y es v . La acción a tomar.
- x es bidimensional: e y Δe .
- $\mu_{B'}(y) = C(v)$. Distrib. de posib. de la acción a tomar.
- $\mu_{A'}(x) = A(e) \wedge B(\Delta e)$. Estado actual del sistema.
- $\mu_{A \rightarrow B}(x, y) = Ri: A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \rightarrow v = C_i(v)$

$$C(v) = \sup_{e, \Delta e} \{T(A(e) \wedge B(\Delta e), A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \rightarrow C_i(v))\}$$

Inferencia en controladores (I)

- Se emplea $T(x,y) = \min(x,y)$.
- $J(x,y) = \min(x,y)$. Mamdani.

$$C(v) = \sup_{e, \Delta e} \{T(A(e) \wedge B(\Delta e), A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \rightarrow C_i(v))\}$$

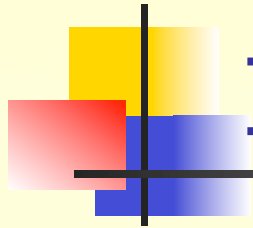
$$C(v) = \sup_{e, \Delta e} \{ \min(\min(A(e), B(\Delta e)), \min(\min(A_i(e), B_i(\Delta e)), C_i(v))) \}$$

Asociatividad:

$$C(v) = \sup_{e, \Delta e} \{ \min(\min(\min(A(e), B(\Delta e)), \min(A_i(e), B_i(\Delta e))), C_i(v)) \}$$

$$C(v) = \min \left(\sup_{e, \Delta e} \{ \min(\min(A(e), B(\Delta e)), \min(A_i(e), B_i(\Delta e))) \}, C_i(v) \right)$$

$$C(v) = \min \left(\min \left(\sup_e \{ \min(A(e), A_i(e)) \}, \sup_{\Delta e} \{ \min(B(\Delta e), B_i(\Delta e)) \} \right), C_i(v) \right)$$



Inferencia en controladores (II)

Entrada al sistema

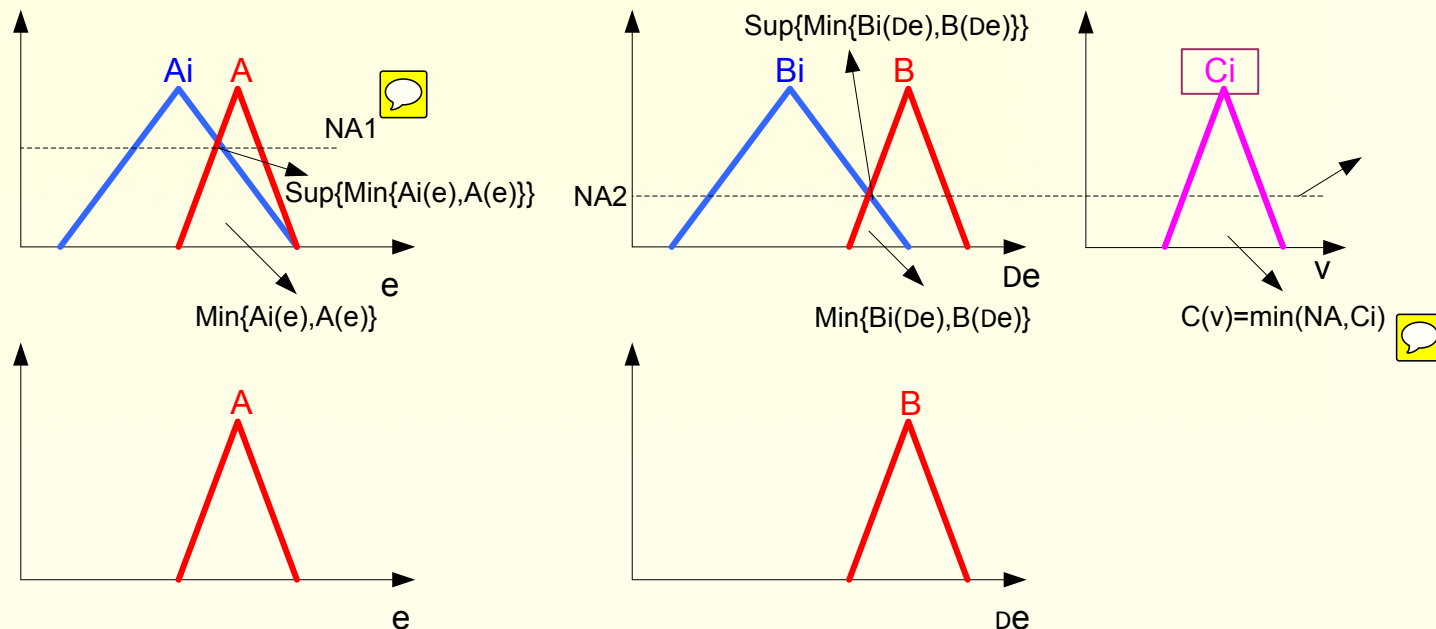
Entrada al sistema

$$C(v) = \min \left(\min_e \left(\sup \left\{ \min(A(e), A_i(e)) \right\}, \sup_{\Delta e} \left\{ \min(B(\Delta e), B_i(\Delta e)) \right\} \right), C_i(v) \right) \quad \text{Antecedente regla}$$

$$C(v) = \min(\min(NA_1, NA_2), C_i(v))$$

$$C(v) = \min(NA, C_i(v))$$

Interpretación geométrica





Procedimiento general

- Dada una base de conocimiento:
 - R1: Si $e = A_1(e)$ y $\Delta e = B_1(\Delta e)$, entonces $v = C_1(v)$
 - ...
 - Rn: Si $e = A_n(e)$ y $\Delta e = B_n(\Delta e)$, entonces $v = C_n(v)$
 - Hecho: $e = A(e)$ y $\Delta e = B(\Delta e)$.
 - Objetivo: $v = C(v)$
- **Procedimiento:**
 1. Para cada regla R_i , se obtiene:
 - $NA = \min\{\text{Sup}_e[\min(A(e), A_i(e))], \text{Sup}_{\Delta e}[\min(B(\Delta e), B_i(\Delta e))]\}$
 - La distribución del consecuente $C'_i(v) = \min(NA, C_i(c))$
 2. Se obtiene la unión: de los $C'_i(v)$ de las reglas que se disparan
 - $C(v) = \cup_i \{C'_i(v)\} = \max_i \{C'_i(v)\}$
 3. *Desborrocificación* de $C(v)$